1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom
   (a) der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, sowie
   (b) der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Berechnen Sie eine Eigenwertzerlegung der Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
aus Beispiel 1 (a). Geben Sie danach (ohne erneut zu rechnen) eine Jordan-Zerlegung und eine Schur-Zerlegung dieser Matrix an. Warum müssen Sie in diesem Beispiel auch für die Schur-Zerlegung keine neue Zerlegung ausrechnen?

3. Berechnen Sie eine Jordan-Zerlegung der Matrix
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
aus Beispiel 1 (b). Hat diese Matrix eine Eigenwertzerlegung? Warum?

4. Berechnen Sie eine Schur-Zerlegung der Matrix
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
aus den Beispielen 1 (b) und 3.

   Hinweis: Gehen Sie vor wie im Existenzbeweis aus der Vorlesung bzw. im Skriptum. Beginnen Sie dabei mit $\lambda = 4$, damit die Rechnung möglichst einfach bleibt.

5. Wir betrachten die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$
   (a) Berechnen Sie eine Jordan-Zerlegung von A für $\varepsilon > 0$. Was passiert mit der Zerlegung, wenn ε gegen 0 geht? Wie lautet die Jordan-Zerlegung für $\varepsilon = 0$?
   (b) Wie lautet die Schur-Zerlegung von A?
   (c) Welche der beiden Zerlegungen ist stabiler? Warum?

6. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Besitzt diese Matrix:
   (a) eine reelle Eigenwertzerlegung?
   (b) eine reelle Jordan-Zerlegung?
   (c) eine reelle Schur-Zerlegung?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

7. (a) Schreiben Sie ein Programm (eine Funktion) in MATLAB oder Octave, das die Potenziteration auf einer beliebigen Matrix mit einem beliebigen Startvektor durchführt.
   (b) Wenden Sie das Programm auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & -8 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 6 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   mit dem Startvektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ an. Wogegen konvergiert das Verfahren?
   Hinweis: Erwarten Sie in diesem Beispiel keine „schönen“ Zahlen als Ergebnis.

8. Wenden Sie die Potenziteration auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   mit mehreren verschiedenen Startvektoren an. Was passiert mit der Konvergenz? Warum?

9. Wenden Sie die Potenziteration auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   mit dem Startvektor $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ an. (Hierfür sollten Sie kein Computerprogramm brauchen!) Konvergiert das Verfahren auf dieser Matrix? Warum?